

# 整数解の個数 → 仕切る

## 例題 V

次の式を満たす整数解の組は何通りあるか。

(1)  $x+y+z=10$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ )

(2)  $x+y+z=10$  ( $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ )

自然数

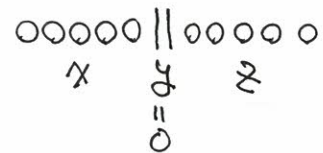
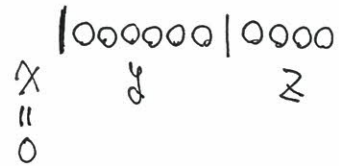
(3)  $x+y+z \leq 10$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ )

(1) 10個の○を  $x, y, z$  に分ける考える



10個の○を 仕切り 2本

$${}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \#$$



(2) ~~X~~ ○○○○○○○○○○ ~~X~~  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$${}_{9}C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \#$$

(3)  $x+y+z=0, 1, 2, 3, \dots, 10$  をそれぞれ分ける方法  $\leftarrow$   $\sum_{k=0}^{10}$  かんじょう。

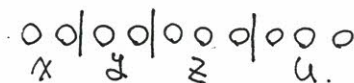
[方程式に  $u$  を挿入]

$$x+y+z+u=10$$

$$10-(x+y+z)=u \text{ とする。 } u \geq 0$$

$$x+y+z+u=10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0)$$

10個の○を 3本の仕切り



$${}_{13}C_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286 \#$$

例題 V [F341-193]

次の式を満たす整数解の組は何通りあるか。

(1)  $x+y+z=10$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ )

(2)  $x+y+z=10$  ( $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ )

(3)  $x+y+z \leq 10$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ )

**解**

(1) 10個の○と2個の|の合計12個の並べ方を考える。

${}_{12}C_2 = 66$                       66通り #

(2) 2個の仕切りは両端はあくと、とほり合うことができないので、



左側の1〜9のうち2か所をえらぶと考える。

${}_{9}C_2 = 36$                       36通り #

(3)  $10 - (x+y+z) = u$  とおく、 $u \geq 0$

$x+y+z+u = 10$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0$ ) と考え、

10個の○と3個の|の合計13個の並べ方を考える。

${}_{13}C_3 = 286$                       286通り #